Documentaţie

#12: Transformarea Fourier

de YO3ITI

Introducere

Una dintre problemele cu care m-am confruntat[1] a fost să înțeleg utilitatea transformării Fourier. Acest articol este o încercare de a explica cât mai transparent noțiunile teoretice fundamentale și modul în care transformarea Fourier este aplicată în practică.

Perioada fundamentală. Pentru a putea înțelege mai bine importanța pe care o are transformarea Fourier în domeniul radiocomunicațiilor, trebuie să explic câteva noțiuni legate de semnale. Periodicitatea semnalelor este un concept important. Undele periodice se repetă absolut identic la un interval de timp T, denumit *perioadă fundamentală*. Lungimea de undă λ a unui semnal nu este altceva decât perioada fundamentală T ca funcție în spațiu. Altfel spus, un semnal periodic se repetă absolut identic la λ metri în spațiu. Deoarece frecvența este inversa lungimii de undă λ, putem scrie:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

unde f este *frecvența fundamentală* a semnalului.

O caracteristică importantă a semnalelor periodice este faptul că sunt absolut identice nu numai la un interval strict egal cu perioada T cât și la orice multiplu de T, de pildă $2T, 3T$ etc. Altfel spus, semnalele care sunt periodice cu intervalul T sunt de asemenea periodice cu $2T$, $3T$ etc.; generalizând, ar trebui ca periodicitatea să fie adevărată pentru orice moment $T+t$; sau o funcție este periodică având perioada fundamentală T, dacă următoarea expresie este adevărată, indiferent de valoarea lui t:

$$f(t+T) = f(t) \tag{2}$$

Pentru un semnal sinusoidal pur, determinarea frecvenței semnalului se poate face relativ ușor (prin măsurare sau estimare); dar cel mai important este că, *intuitiv*, privind o undă sinusoidală, știm că această undă este caracterizată de o frecvență — și perioadă — unice. Lucrurile se complică când semnalul devine complex și, tot *intuitiv*, nu mai pare a fi descris de o frecvență unică. De exemplu, care este frecvența semnalului din figura următoare ? Sau, mai bine spus, are semnalul din imaginea de mai jos o frecvență *unică* ? Intuitiv, semnalul

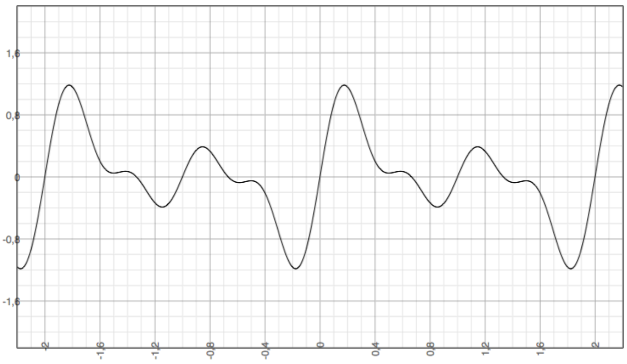

Figura 1 – Ce frecvență are acest semnal ? Din definiția periodicității (2) se deduce că acest semnal nu este periodic pe regiunea reprezentată. Din acest motiv se poate trage concluzia greșită că semnalul din imagine nu are o frecvență bine specificată.

fiind aperiodic,

Introducere

O serie Fourier descompune o funcție periodică întro sumă de funcții sinusoidale. Pentru a începe analiza unei serii Fourier, mai întâi trebuie definită funcția periodică.

Să definim o serie Fourier. O serie Fourier, cu perioada T este o sumă infinită de funcții sinusoidale (sinus și cosinus), fiecare având frecvența egală cu un multiplu întreg de $^1/_T$ (inversa perioadei fundamentale). O serie Fourier conține și o constantă și se scrie:

$$g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cdot cos\Big(\frac{2\pi mt}{T}\Big) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot sin\Big(\frac{2\pi nt}{T}\Big) \tag{3}$$

Expresia de mai sus se citește ”o serie Fourier este suma ponderată a unui infinit de funcții cosinusoidale plus suma unui infinit de funcții sinusoidale”. Constantele a_m și b_n sunt coeficienții seriei Fourier. Acestea determină ponderea relativă a fiecărei sinusoide. Se pune întrebarea: Pentru o funcție arbitrară, $f(t)$ – cât de precis putem aproxima această funcție cu ajutorul unor sinusoide simple, fiecare având perioada egală cu un multiplu întreg a perioadei fundamentale ? Altfel spus, pentru o funcție periodică oarecare $f(t)$, cât de bine o poate aproxima funcția $g(t)$? – vezi ecuația 3.

Puțină teorie — numere complexe

Transformarea Fourier se realizează cu ajutorul numerelor complexe. Voi prezenta câteva aspecte legate de numerele complexe, care sunt utilizate în studiul transformării Fourier.

Un număr complex poate fi scris în forma:

$$z = x + iy \tag{4}$$

unde

$$i^2 = -1 \rightarrow i = \sqrt{-1} \tag{5}$$

Numărul complex z are o parte *reală*, dată de x și o parte *imaginară*, dată de y. Partea reală se mai scrie:

$$x = \Re(z) \tag{6}$$

Partea imaginară se mai scrie:

$$y = \Im(z) \tag{7}$$

Exemplu: $z = 4 + i5 \Rightarrow \Re(z) = 4 \quad \text{și} \quad \Im(z) = 5$

Adunarea și înmulțirea Adunarea și înmulțirea numerelor complexe se face foarte simplu. Adunarea a două numere complexe z_1 și z_2 se face prin însumarea părților reale și imaginare.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ \Rightarrow z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{8}$$

A complex number z can be written in standard form as:

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|e^{i\theta_1} \\ z_2 &= |z_2|e^{i\theta_2} \end{aligned} \tag{9}$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{11}$$

Forma polară face împărțirea foarte simplă.

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 4,47e^{i296,56^\circ} = 2 - i4 \tag{12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = 2,24e^{-i153,44^\circ} = -2 - i1 \tag{13}$$

BIBLIOGRAFIE

La redactarea acestui document au fost utilizate următoarele surse bibliografice:

[1] Ioan Constantin, Ioan Diaconescu, Mircea Ivanciovici and Constantin ¸Serbu. *Aplicaţii şi probleme de radio şi televiziune*. Editura Didactică şi Pedagogică, Spiru Haret 12, Bucureşti, Sector 1, Bucureşti, 010176, 1.0 edition, February 1982.

YO3ITI

Documentație de YO3ITI • Documentation by YO3ITI

P.O. BOX 49-6
024360 Bucharest
Romania

http://www.yo3iti.ro